Notice d'utilisation des opérateurs de mécanique de la rupture pour l'approche classique (élasticité non-linéaire)

Résumé :

Ce document présente les opérateurs de mécanique de la rupture disponibles dans *Code_Aster* dans le cadre de l'approche classique. L'approche classique est limitée à l'élasticité non-linéaire. Des conseils d'utilisation sont donnés.

Il est conseillé d'avoir pris connaissance du guide méthodologique général en mécanique de la rupture, qui recense les différentes approches disponibles [U2.05.00].

Table des matières

1 Généralités

L'approche classique est l'approche historique pour la mécanique de la rupture. Elle a été initialement développée dans le cadre de l'élasticité linéaire, puis étendue à l'élasticité non-linéaire.

1.1 Mécanique élastique linéaire de la rupture en quasi-statique

Ce paragraphe rappelle les paramètres caractéristiques en mécanique élastique linéaire de la rupture.

1.1.1 Facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent la singularité des contraintes en pointe de fissure. Leur expression générale est de la forme : $K=\lim_{r\to 0}\sigma(r)\sqrt{r}$. Trois facteurs d'intensité des contraintes sont définis, associés aux trois modes d'ouverture de la fissure.
En élasticité linéaire, les facteurs d'intensité des contraintes permettent de décomposer le champ de déplacement $\mathbf{u}$ en une partie singulière et une partie régulière 2828 :

$$u=u_R+K_I u_S^I+K_{II} u_S^{II}+K_{III} u_S^{III}\ .$$

1.1.2 Taux de restitution d'énergie

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω. Soient :

$\mathbf{u}$ le champ de déplacement,
T le champ de température,
$\mathbf{f}$ le champ de forces volumiques appliquées sur Ω,
$\mathbf{g}$ le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
$\mathbf{U}$ le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.
$\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
$\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations,
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}$ le tenseur des déformations d'origine thermique,
$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},T)$ la densité d'énergie libre.

Le taux de restitution d'énergie G correspond à l'approche énergétique de la rupture de Griffith 28. Il est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre $W(\mathbf{u})$ par rapport au domaine Ω :

$$G=\frac{-\partial W(\mathbf{u})}{\partial\Omega}$$

avec : $W(\mathbf{u})=\int_\Omega \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),T)\,d\Omega-\int_\Omega \mathbf{f}\,\mathbf{u}\,d\Omega-\int_S \mathbf{g}\,\mathbf{u}\,d\Gamma$

On rappelle que le taux de restitution d'énergie est équivalent à l'intégrale de Rice en élasticité linéaire 28.
En élasticité linéaire plane, les coefficients d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie par la formule d'Irwin :

$$G=\frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2+K_{II}^2)$$ en déformations planes

$$G=\frac{1}{E}(K_I^2+K_{II}^2)$$ en contraintes planes

$$G=\frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2+K_{II}^2\right)+\frac{K_{III}^2}{2\mu} \text{ avec } \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \text{, en 3D}$$

1.2 Extension à l'élasticité non-linéaire

Les définitions précédentes ne sont rigoureuses qu'en thermoélasticité linéaire mais des extensions sont possibles aux problèmes non linéaires. En particulier, il est possible de définir et de calculer le taux de restitution d'énergie en élasticité non linéaire, à condition que le chargement reste radial et monotone.

L'application de l'approche globale en dehors de son domaine de validité conduit à des résultats non satisfaisants : problèmes de « transférabilité » d'éprouvettes à structures (effet petit défaut 28), mauvaise prise en compte de l'histoire du chargement (effet de pré-chargement à chaud 28), ...

2 Cadre d'utilisation des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans *Code_Aster*

2.1 Rappel des méthodes de calcul disponibles

2.1.1 Méthode thêta

Calcul du taux de restitution d'énergie

La difficulté du calcul du taux de restitution d'énergie vient de la dérivation par rapport au domaine d'une intégrale dépendant de ce même domaine. Une méthode rigoureuse est la méthode thêta, qui est une méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle 282828. Elle consiste à introduire un champ $\boldsymbol{\theta}$ et à considérer des transformations $F^{\eta}:\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{M}+\eta\boldsymbol{\theta}(\mathbf{M})$ du domaine de référence Ω en un domaine Ω_{η} qui correspondent à des propagations de la fissure. Ces transformations ne doivent pas modifier les bords du domaine hormis le fond de fissure.

Cette méthode est détaillée dans [R7.02.01] et [R7.02.04]. L'utilisation de la méthode, développée dans l'opérateur `CALC_G` de *Code_Aster*, est décrite au §4.1.

Avec la méthode thêta, le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_0} G(s)\boldsymbol{\theta}(s)\cdot\mathbf{m}(s)\,ds=G(\boldsymbol{\theta}),\ \forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$$

où $\mathbf{m}$ est la normale unitaire au fond de fissure Γ_0 situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ et rentrant dans Ω, et où $G(\boldsymbol{\theta})$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\mathbf{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure η :

$$G(\boldsymbol{\theta})=\left.\frac{-d\,W(\mathbf{u}(\eta))}{d\eta}\right|_{\eta=0}$$

On note $\boldsymbol{\Theta}$ l'ensemble des champs θ admissibles (voir §4.1.1).

Pour un problème thermo-élastique linéaire ou non-linéaire l'expression de $G(\boldsymbol{\theta})$ est :

$$\begin{aligned}G(\theta)= &\int_{\Omega}\left[\sigma(\boldsymbol{u}):(\nabla\boldsymbol{u}.\nabla\theta)-\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\operatorname{div}\theta\right]d\,\Omega && \leftarrow \textit{terme classique}\\ &-\int_{\Omega}\frac{\partial\Psi}{\partial T}(\nabla T.\theta)\,d\,\Omega && \leftarrow \textit{terme dû à la thermique}\\ &+\int_{\Omega}\left[(\nabla\boldsymbol{f}.\theta)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}.\boldsymbol{u}\operatorname{div}\theta\right]d\,\Omega && \leftarrow \textit{terme dû aux forces volumiques } \boldsymbol{f} \textit{ sur } \Omega\\ &+\int_{\Gamma_F}\left[(\nabla\boldsymbol{F}.\theta)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}.\boldsymbol{u}(\operatorname{div}\theta-\boldsymbol{n}.\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{n}})\right]d\,\Gamma && \leftarrow \textit{terme dû aux forces surfaciques } \boldsymbol{F} \textit{ sur } \Gamma_F\end{aligned}$$

Si on se place dans l'hypothèse des grands déplacements (mais toujours en élasticité non linéaire en petites déformations), il faut remplacer le terme

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}\,d\,\Omega \text{ par } \int_{\Omega}F_{ik}S_{kj}u_{i,p}\theta_{p,j}\,d\,\Omega$$

avec $\mathbf{S}$ le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange appelé encore deuxième tenseur de Piola-Kirchoff, $\mathbf{F}$ le gradient de la transformation qui fait passer de la configuration de référence à la configuration actuelle.

Si l'on tient compte des déformations initiales ε_{ij}^{0} et des contraintes initiales σ_{ij}^{0}, il faut ajouter le terme :

$$\int_{\Omega}\left[\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\sigma}_{ij}\right)\varepsilon_{ij,k}^{\circ}-\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{th}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\right)\sigma_{ij,k}^{\circ}\right]\theta_k\, d\,\Omega\ .$$

Il semblerait que cette expression ne permette pas d'imposer à la fois déformations initiales et contraintes initiales (même si les champs sont en équilibre). Il n'est donc pas possible pour le moment d'imposer à la fois déformations initiales et contraintes initiales (voir §2.2.5).

Pour un problème thermo-élastoplastique l'expression de $G(\theta)$ retenue dans *Code_Aster* est :

$$G(\theta)=\int_{\Omega}\sigma_{ij}u_{i,k}\theta_{k,j}-\tilde{\Psi}\,\theta_{k,k}-\left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}T_{,k}+(R+\sigma_y)\,p_{,k}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\beta_{ij}}\beta_{ij,k}-\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij,k}^{p}\right)\theta_k\, d\,\Omega$$

avec :

$\tilde{\Psi}$ l'énergie mécanique totale,

ε^{p} le tenseur des déformations plastiques,

p la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope (déformation plastique cumulée),

β une ou plusieurs variables tensorielles ou scalaires d'écrouissage cinématique,

σ_y la limite d'élasticité linéaire initiale,

R le rayon de la surface de charge pour l'écrouissage isotrope.

Pour un chargement radial et monotone : $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij,k}^{p}=(R+\sigma_y)\,p_{,k}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\beta_{ij}}\beta_{ij,k}$ et on retrouve l'expression de $G(\theta)$ en thermo-élasticité non linéaire [R7.02.03].

Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

En thermo-élasticité linéaire, on peut associer à G une forme bilinéaire symétrique $g(\mathbf{u},\mathbf{v})$ par la formule de polarisation. On peut ensuite montrer que cette forme bilinéaire définit un produit scalaire pour lequel les fonctions singulières u_S sont orthogonales entre elles et orthogonales avec le déplacement régulier u_R [R7.02.05].

Par suite, on peut calculer les facteurs d'intensité des contraintes à partir de $g(\mathbf{u},\mathbf{v})$ par la méthode thêta :

Finalement, de manière générale :

$$\begin{cases}K_I=E\,g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{I})\\ K_{II}=E\,g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{II})\end{cases}\quad \text{en contraintes planes}$$

$$\begin{cases}K_I=\dfrac{E}{1-\nu^2}g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{I})\\ K_{II}=\dfrac{E}{1-\nu^2}g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_S^{II})\end{cases}\quad \text{en déformations planes et en 3D}$$

et $K_{III}=2\mu . g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_S^{III})$ en 3D

Ce calcul est possible dans *Code_Aster* avec l'option CALC_K_G de l'opérateur CALC_G.

Calcul local – calcul global

En dimension 2, le fond de fissure Γ_0 se ramène à un point. Un seul champ θ suffit pour calculer le taux de restitution d'énergie (option CALC_G) ou les facteurs d'intensité des contraintes (option CALC_K_G).

En dimension 3 la dépendance de $G(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Dans *Code_Aster*, on peut calculer :

- le taux de restitution global G correspondant à une progression uniforme de la fissure (option CALC_G_GLOB) ;
- le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ solution de l'équation variationnelle précédente (option CALC_G). Les champs θ_i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont décrits dans le §4.2.

2.1.2 Calcul par extrapolation du champ de déplacements

La méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du déplacement, développée dans l'opérateur POST_K1_K2_K3, est basée sur le développement asymptotique du champ de déplacement en fond de fissure [R7.02.08].

En 2D, dans un milieu élastique, linéaire, isotrope et homogène, les champs de contraintes et de déplacement sont connus analytiquement pour les modes d'ouverture de la fissure (caractérisé par $K1$), de glissement plan ($K2$) et de glissement antiplan ($K3$). Dans le cas général en 3D, on peut montrer que le comportement asymptotique des déplacements et des contraintes est la somme des solutions correspondants aux modes 1 et 2 (en déformations planes) et au mode 3 (antiplan), et de quatre autres solutions particulières, mais qui sont plus régulières que les précédentes.

Dans tous les cas, la singularité est donc la même et on peut écrire les relations suivantes dans le plan normal au fond de fissure, en un point M :

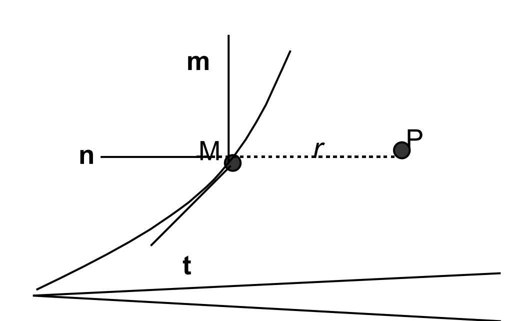
$$K_1(M)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8(1-\nu^2)}[U_m]\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\right)$$
$$K_2(M)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8(1-\nu^2)}[U_n]\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\right)$$
$$K_3(M)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{E}{8(1+\nu)}[U_t]\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\right)$$

avec :

$\mathbf{t}, \mathbf{n}$ dans le plan de la fissure en M,
$\mathbf{t}$ vecteur tangent au fond de fissure en M,
$\mathbf{n}$ vecteur normal au fond de fissure en M,
$\mathbf{m}$ vecteur normal au plan de la fissure en M,
$[U]$ saut de déplacement entre les lèvres de fissure :

$$[U_{\mathbf{m}}]=\left(U^{\text{lèvre supérieure}}-U^{\text{lèvre inférieure}}\right)\cdot \mathbf{m}$$

$r=\|\mathbf{MP}\|$ où P est un point du plan normal au fond de fissure en M, situé sur une des lèvres.



Trois méthodes d'extrapolation sont disponibles [R7.02.08] et sont systématiquement mises en œuvre pour le calcul de $K1$, $K2$ et $K3$. À partir des facteurs d'intensité des contraintes, la formule d'Irwin permet ensuite de calculer le taux de restitution de l'énergie G .
La distance d'extrapolation ABSC_CURV_MAXI est le seul paramètre utilisateur. Des conseils pour le choix de ce paramètre et l'interprétation des résultats sont donnés dans le §4.3.

Remarques :

- *On peut constater que les signes de $K2$ et $K3$ dépendent de l'orientation de $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$. Ceci n'est pas trop gênant dans la mesure où les critères de rupture ou de fatigue n'utilisent que les valeurs absolues de $K2$ et $K3$.*
- *La méthode utilisée ici est théoriquement moins précise que le calcul à partir de la forme bilinéaire du taux de restitution de l'énergie et des déplacements singuliers [R7.02.01 et R7.02.05] (opérateur CALC_G). Elle permet cependant d'obtenir facilement des valeurs relativement fiables des facteurs d'intensité des contraintes. La comparaison des différentes méthodes de calcul est toujours utile pour estimer la précision des résultats obtenus.*

Remarque sur l'utilisation de *POST_K1_K2_K3* avec des éléments de Barsoum avec contact :

Le contact n'est généralement pas pris en compte correctement pour les nœuds au quart (sauf pour la formulation continue du contact). Le calcul de $K1$ sur un nœud sommet d'un éléments de Barsoum en présence de contact est donc faux. Ceci n'est pas bien grave en pratique car lorsqu'il y a contact, on sait que $K1$ doit être nul.

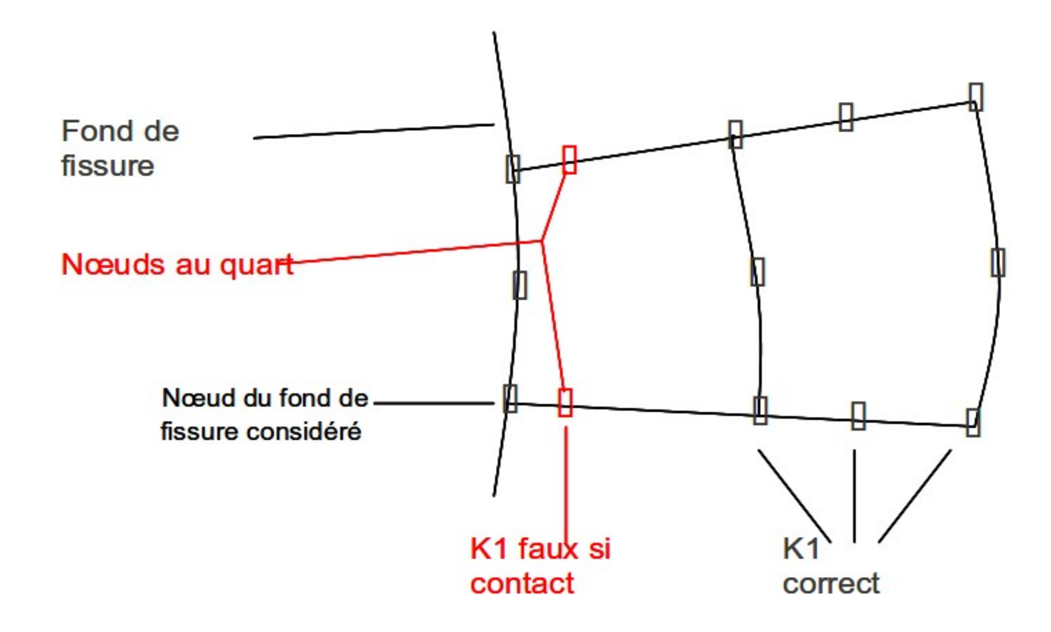


Figure 2.1.2-a : Barsoum et contact

2.2 Domaine de validité en général

Comme cela sera développé dans le chapitre suivant, la fissure peut être maillée (calcul classique) ou non maillée (utilisation de la méthode X-FEM). Sauf indication contraire, les informations suivantes sont valables dans les deux cas.

2.2.1 Modèle

Fissure maillée : les opérateurs `CALC_G` et `POST_K1_K2_K3` sont disponibles pour toutes les modélisations des milieux continus 2D et 3D : déformations planes, contraintes planes, 2D axisymétrique et 3D.

Ces modélisations correspondent pour un milieu bidimensionnel à des triangles à 3 ou 6 nœuds, des quadrangles à 4, 8 ou 9 nœuds et des segments à 2 ou 3 nœuds, pour un milieu tridimensionnel à des hexaèdres à 8, 20 nœuds ou 27 nœuds, des pentaèdres à 6 ou 15 nœuds, des tétraèdres à 4 ou 10 nœuds, des pyramides à 5 ou 13 nœuds, des faces à 4, 8 ou 9 nœuds.

Fissure non maillée (X-FEM) : les opérateurs `CALC_G` et `POST_K1_K2_K3` sont disponibles pour toutes les modélisations des milieux continus 2D et 3D (déformations planes, contraintes planes, axisymétrie et 3D).
Tous les types géométriques de mailles sont disponibles, sauf les QUAD9 et les HEXA27.
Pour plus d'informations spécifiques concernant X-FEM, on pourra se référer à [U2.05.02].

	D_PLAN	C_PLAN	AXIS	3D
CALC_G	•	•	•	•
CALC_K_G	•	•	•	•
POST_K1_K2_K3	•	•	•	•

Tableau 2.2.1-1 : Modélisations disponibles

2.2.2 Caractéristiques du matériau

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie, les caractéristiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique et éventuellement limite d'élasticité, module d'écrouissage) peuvent dépendre de la température. Le calcul est valable pour un matériau homogène isotrope ou pour un bimatériau isotrope (fissure à l'interface de deux matériaux aux caractéristiques différentes). Le calcul reste également valable si les propriétés matériau ne sont pas homogènes, mais uniquement dans le cas où le gradient de propriétés matériau est orthogonal à la direction du champ thêta. Enfin, la seul variable de commande (voir [U4.43.03] : opérateur `AFFE_MATERIAU`, mot-clé `AFFE_VARC`) autorisée pour le calcul du taux de restitution d'énergie est la température `'TEMP'`.

Pour le calcul des coefficients d'intensité de contraintes à un instant donné, les caractéristiques du matériau doivent être indépendantes de la température. Le calcul est valable uniquement pour un matériau homogène isotrope (éventuellement pour un bimatériau si la pointe de fissure n'est pas située à l'interface des deux matériaux).
Les caractéristiques $S_y(T)$ et `D_SIGM_EPSI` (T) ne sont traitées que pour un problème élastique non linéaire avec écrouissage isotrope linéaire de Von Mises `ELAS_VMIS_LINE` et avec l'option de calcul du taux de restitution d'énergie.

	Propriétés dépendant de la température	Bimatériau (fissure à l'interface)	Matériau orthotrope
CALC_G	•	•	–
CALC_K_G	•	–	–
POST_K1_K2_K3	•	–	–

Tableau 2.2.2-1 : Caractéristiques du matériau

1er cas : On a un bimatériau mais la pointe de fissure est dans un seul matériau, cf. Figure 3.1-a. Si on est assuré que la couronne, définie entre les rayons inférieur R_INF et supérieur R_SUP, a comme support des éléments du même matériau, le calcul est possible quelle que soit l'option choisie. Sinon seules les options CALC_G et CALC_G_GLOB sont possibles.

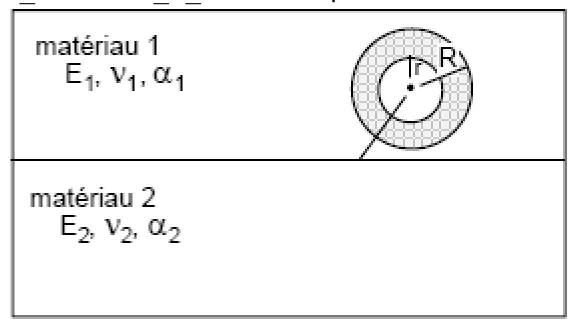


Figure 3.1-a : Bimatériau : 1er cas

2nd cas : On a un bimatériau où la pointe de fissure est à l'interface, cf. Figure 3.1-b. À ce jour, seule les options de calcul du taux de restitution d'énergie (options CALC_G_GLOB et CALC_G) sont disponibles. Le calcul de coefficients d'intensité de contraintes n'est pas possible dans ce cas.

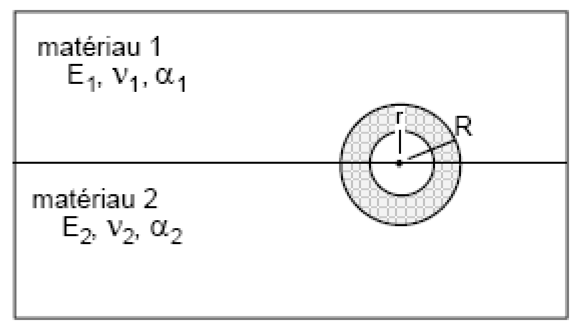


Figure 3.1-b : Bimatériau : 2nd cas

2.2.3 Relation de comportement utilisée en post-traitement de mécanique de la rupture

Logiquement, la relation de comportement utilisée lors du post-traitement en mécanique de la rupture est celle qui a servi lors du calcul mécanique.

On rappelle que le calcul du taux de restitution de l'énergie est possible dans les cas suivants (pour plus de détails, voir le Tableau 2.2.3-1) :

- thermoélasticité linéaire,
- thermoélasticité non linéaire (hyperélasticité),
- thermoélastoplasticité (critère de Von Mises avec écrouissage isotrope ou cinématique).

Le calcul des coefficients d’intensité de contraintes n'est quant à lui possible uniquement en thermoélasticité linéaire dans l’hypothèse des petites déformations.

Dans ces cas de figures, il n'y a donc aucune raison pour choisir une relation de comportement différente entre le calcul mécanique et le post-traitement. Dans ce cas, il ne faut donc **pas** renseigner COMP_ELAS/COMP_INCR sous CALC_G. Si ni COMP_ELAS ni COMP_INCR ne sont présents sous CALC_G alors, le post-traitement sera exécuté avec la relation de comportement du calcul mécanique.

Le mot-clé facteur COMP_ELAS/COMP_INCR sous CALC_G ne sert que dans les cas très particuliers où l'on souhaite réaliser le post-traitement avec une loi de comportement différente de celle qui a servi au calcul mécanique. Ce mot-clé doit être utilisé avec une extrême prudence.

	RELATION	CALC_G	CALC_K_G	POST_K1_K2_K3
COMP_ELAS	'ELAS'	•	•	•
	'ELAS_VMIS_LINE'	•	-	-
	'ELAS_VMIS_TRAC'	•	-	-
COMP_INCR	'ELAS'	•	•	•
	'VMIS_ISOT_TRAC'	•	-	-
	'VMIS_ISOT_LINE'	•	-	-
	'VMIS_CINE_LINE'	-***	-	-
DEFORMATION	'PETIT'	•	•	•
	'GROT_GDEP'	• (hors X-FEM)	-	-

Tableau 2.2.3-1 : Lois de comportement compatibles pour le post-traitement en mécanique de la rupture

2.2.4 Chargement

Certains chargements sont associés à des termes supplémentaires dans l'expression du taux de restitution d'énergie ou des facteurs d'intensité des contraintes selon la méthode thêta. Les chargements qui sont supportés actuellement pour le calcul en mécanique de la rupture sont les suivants :

- Dilatation thermique (transmise via les variables de commande) ;
- Forces volumiques : FORCE_INTERNE, PESANTEUR, ROTATION ;
- Forces surfaciques sur les lèvres de la fissure : PRES_REP , FORCE_CONTOUR , FORCE_FACE ;
- Déformation initiale (fissure maillée uniquement) : PRE_EPSI .

Il n'est pas possible de prendre en compte un déplacement imposé sur les lèvres de la fissure (DDL_IMPO ou FACE_IMPO) ou une force nodale sur celles-ci.

Les chargements sont transmis pour le post-traitement avec le mot clé EXCIT de CALC_G. Par défaut (mot clé EXCIT absent), tous les chargements du calcul mécanique sont utilisés dans le post-traitement en mécanique de la rupture. C'est donc la méthode conseillée. Si le mot clé EXCIT est présent avec une partie seulement des chargements, un message d'alarme est émis.

Il est important de noter que les seuls chargements qui ont une influence dans un calcul de mécanique de la rupture avec la méthode θ sont ceux appliqués sur les éléments à l'intérieur de la couronne (entre R_{inf} et $R_{\sup}$ pour un comportement thermo-élastique linéaire ou non linéaire [R7.02.01 §3.3], entre le fond de fissure et $R_{\sup}$ pour une relation thermo-élastoplastique [R7.02.07]).

Remarque :

Si on fait un calcul en grandes rotations et grands déplacements (mot clé DEFORMATION = 'GROT_GDEP' sous le mot clé facteur COMP_ELAS) les seuls chargements supportés sont des charges mortes, typiquement une force imposée et pas une pression [R7.02.03 §2.4].

2.2.5 État initial

Pour une fissure maillée, il est possible de tenir compte d'un état initial (soit des contraintes initiales, soit des déformations initiales) pour le calcul du taux de restitution d'énergie. Deux possibilités sont offertes à l'utilisateur :

- définir des déformations initiales avec le mot-clé PRE_EPSI dans la commande AFFE_CHAR_MECA(_F) [U4.44.01] et les récupérer sous le mot-clé CHARGE dans la commande CALC_G [U4.82.03] (voir un exemple de mise en place dans le cas test sslp102);
- récupérer un champ de contraintes ou déformations initiales issu d'un calcul mécanique (evol_noli issu de la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]) avec le mot-clé ETAT_INIT.

Il n'est pas possible de prendre simultanément en compte des contraintes initiales et des déformations initiales.

Il semblerait qu'à l'heure actuelle, aucun test ne valide la prise en compte d'une contrainte initiale. Cette fonctionnalité est donc à utiliser avec prudence.

2.2.6 Contact /frottement

Le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture dans *Code_Aster* n'est **pas valide** s'il y a contact avec **frottement** entre les faces de la fissure. En effet le calcul du taux de restitution d'énergie ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs.
En revanche si les éléments de contact frottant sont au delà de la couronne définie entre R_{inf} et $R_{\sup}$ les calculs de G, $G(s)$, $K1$ et $K2$ sont valides.
Par contre, il est possible pour le calcul de G et de $G(s)$ seulement de prendre en compte des conditions de contact sans frottement pour éviter l'interpénétration des lèvres de la fissure.

2.2.7 Facteurs d'intensité des contraintes pour un problème thermo-mécanique

Les facteurs d'intensité des contraintes obtenus avec l'option `CALC_K_G` sont calculés en évaluant la forme bilinéaire de G avec une solution singulière purement mécanique (solution asymptotique de Westergaard). Si on résout un problème thermo-mécanique, on ne prend alors pas en compte la singularité due au champ thermique. Un indicateur de l'erreur due à cette approximation peut être obtenu en évaluant la différence entre `G` et `G_IRWIN` . En pratique, on évalue en tout point du fond de fissure la quantité $\frac{|G-G_{irwin}|}{|G|}$, et on en fait ensuite la moyenne arithmétique. Si cette moyenne excède les 50 %, on estime alors que l'on sort du périmètre de validité de l'approche, et un message d'alarme est émis. Cependant, les valeurs de G sont justes.

Pour `POST_K1_K2_K3`, la similaire remarque est présente.

2.3 Validité du calcul de G en non-linéaire

Le problème essentiel dans les situations non linéaires provient de la difficulté de séparer les différentes contributions énergétiques. Il faut considérer deux classes de problèmes très distinctes :

- celle où, malgré les non linéarités géométriques ou de comportement, on peut exhiber un potentiel pour les actions intérieures et extérieures (élasticité non linéaire ou hyperélasticité),
- celle où un tel potentiel n'existe pas (thermo-élastoplasticité).

Pour la première classe, on peut étendre le critère de Griffith en utilisant l'énergie potentielle à l'équilibre, et calculer le taux de restitution d'énergie comme en thermo-élasticité linéaire.

Pour la seconde classe de problème, la difficulté essentielle vient du fait que la dissipation n'est pas uniquement due à la propagation de la fissure elle-même. On ne peut plus distinguer quelle part de l'énergie restituée sert à la propagation et quelle part est directement utilisée par un autre phénomène dissipatif (la plasticité en l'occurrence).

2.3.1 Thermo-élasticité non linéaire

Non linéarité de comportement : la relation de comportement élastique non linéaire est décrite en [R5.03.20]. Il est à noter que la loi élastoplastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'un chargement radial et monotone est équivalent à la loi élastique non-linéaire. Le matériau hyperélastique a un comportement mécanique réversible, c'est-à-dire que tout cycle de chargement n'engendre aucune dissipation. De ce fait la relation de comportement du matériau dérive du potentiel d'énergie libre et on sait donner un sens au taux de restitution d'énergie dans le cadre de l'approche énergétique de Griffith.

Non linéarité géométrique : on étend la relation de comportement à de grandes déformations, dans la mesure où elle dérive d'un potentiel (loi hyperélastique). Cette fonctionnalité est déclenchée par le mot-clé `DEFORMATION = 'GREEN'` dans la commande `CALC_G`.

Une telle relation de comportement permet en toute rigueur de prendre en compte de grandes déformations. Toutefois, on se cantonne à de grands déplacements et de grandes rotations, mais on

reste en petites déformations. Cela pour assurer l'existence d'une solution et pour être identique à un comportement élastoplastique sous un chargement radial monotone [R5.03.20 §2.1].

2.3.2 Thermo-élastoplasticité

Le domaine de validité du calcul du taux de restitution d'énergie est limité au cadre thermo-élastique linéaire ou non-linéaire. Pour traiter le problème élastoplastique, deux solutions sont envisageables :

- se ramener à un problème thermo-élastique non-linéaire avec des hypothèses restrictives,
- utiliser une autre formulation, comme celle de l'approche énergétique.

2.3.2.1 Équivalence entre un problème thermo-élastique non linéaire et un problème thermo-élastoplastique

La relation de comportement élastique non linéaire offre la possibilité de traiter les problèmes de mécanique de la rupture en approchant le comportement thermo-élastoplastique. Dans le cas d'un **chargement radial monotone**, elle permet d'obtenir des déformations et des contraintes de la structure semblables à celles que l'on obtiendrait si le matériau présentait un écrouissage isotrope. L'utilisation des indicateurs de décharge et de perte de radialité permet de s'assurer de l'équivalence des lois de comportement, cf. §18.

Mais les conditions de chargements proportionnels et monotones, indispensables pour assurer la cohérence du modèle avec le matériau réel, conduisent à des restrictions importantes du champ des problèmes à même d'être traités par cette méthode (la thermique en particulier peut conduire à des décharges locales).

2.3.2.2 Autre formulation

Voir guide méthodologique [U2.05.00]

3 Mise en œuvre d'une étude de mécanique de la rupture

3.1 Maillage

3.1.1 Cas d'une fissure maillée

Conditions à respecter : il n'y a aucune condition à respecter *a priori* sur le type de maillage en fond de fissure. Cependant, d e la qualité du maillage dépend la qualité numérique des résultats issus du calcul mécanique (déplacements et contraintes) et par conséquence de la qualité des grandeurs en mécanique de la rupture.

La définition de la fissure par l'opérateur DEFI_FOND_FISS nécessite des groupes de mailles relatifs :
- aux mailles du fond de fissure (mailles linéiques en 3D, maille point en 2D),
- aux mailles des lèvres de la fissure (maillage surfaciques en 3D, mailles linéiques en 2D).

Remarques et conseils :
- Les calculs des grandeurs de mécanique de la rupture sont valides pour des éléments linéaires ou quadratiques, mais il est fortement conseillé d'utiliser des éléments quadratiques, en particulier en 3D. Le calcul de ces grandeurs nécessite en effet de déterminer avec une bonne approximation les champs de contrainte et de déformation qui varient fortement au voisinage du fond de fissure. Or, à nombre de nœuds identique, les éléments quadratiques donnent de meilleurs résultats que les éléments linéaires.
- Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes avec l'opérateur POST_K1_K2_K3 , ou avec les options 'CALC_K_G' ou 'CALC_K_MAX' de l'opérateur CALC_G ne peut être réalisé que dans le cas où les lèvres de la fissure sont initialement collées, ce qui correspond à CONFIG_INIT='COLLEE' pour l'opérateur DEFI_FOND_FISS .
- Un maillage rayonnant en fond de fissure n'est pas obligatoire : les rayons R_{inf} et $R_{\sup}$ ne sont pas liés au maillage et la couronne peut être « à cheval » sur plusieurs éléments. Néanmoins la pratique montre qu'un maillage rayonnant en fond de fissure donne de bons résultats numériques.
- Le mailleur GIBI comporte une procédure automatique paramétrée qui permet de concevoir des maillages de blocs fissure en 3D. Cette procédure a été développée par EDF-R&D et a été validée pour assurer la bonne qualité du maillage. On obtient un maillage au format GIBI que peut reconnaître *Code_Aster* (commande PRE_GIBI). L'utilisateur renseigne un certain nombre de paramètres géométriques (dimensions de fissure, taille de bloc,...) ou topologiques (modélisation du tore de fond de fissure en couronnes, secteurs et tranches, déraffinement, nombre d'éléments,...) et le logiciel génère un bloc fissure, qui peut ensuite être intégré dans une autre structure. Une procédure similaire est en cours de développement dans la plate-forme Salomé et devrait être disponible fin 2010.
- Lors de l'utilisation de maillages quadratique, il est **fortement conseillé** de positionner les nœuds milieux des éléments quadratiques touchant le fond de fissure au quart des arêtes (maillage de type **Barsoum**). Ainsi la dépendance en $\sqrt{r}$ du champ de déplacement est mieux représentée et la qualité des résultats est améliorée. On peut directement introduire de type d'éléments dans un maillage quadratique existant par le mot clé MODI_MAILLE (option 'NOEUD_QUART') de la commande MODI_MAILLAGE [U4.23.04]. Le temps de calcul n'est pas modifié, mais le gain en terme de qualité des résultats est considérable.

Vérification de la qualité du maillage : Pour apprécier la qualité du maillage il est conseillé de réaliser un calcul élastique et d'utiliser les estimateurs d'erreurs de discrétisation : les estimateurs d'erreurs de ZHU-ZIENKIEWICZ en élasticité 2D [R4.10.01], l'estimateur d'erreur par résidu [R4.10.02] et les estimateurs en Quantité d'Intérêt [R4.10.06], les Quantités d'Intérêt disponibles étant $K1$, $K2$ et $K3$ issus de la méthode n°3 de POST_K1_K2_K3.

Ces estimateurs sont implantés dans *Code_Aster* dans la commande CALC_ERREUR [U4.81.06]. Ils sont activés à partir des options suivantes : ERZ1_ELEM pour $ZZ1$, ERZ2_ELEM pour $ZZ2$ et

ERME_ELEM pour l’estimateur en résidu par élément. L'estimation en Quantité d'Intérêt nécessite la mise en place d'un problème dual (voir par exemple le cas test zzzz257).

3.1.2

3.1.3 Cas d'une fissure non maillée

Conditions à respecter : l'utilisation de la méthode X-FEM permet de lever certaines difficultés liées au maillage. Notamment, un maillage libre de la structure saine suffit. Cependant, un maillage suffisamment fin reste nécessaire dans les zones à fort gradient (autour du fond de fissure par exemple). Il est vrai qu'en élasticité linéaire, l'enrichissement par les fonctions asymptotique améliorer la précision de la méthode : à même taille de maille, les éléments X-FEM seront donc plus précis en fond de fissure que les éléments classiques. Mais cela n'a une influence que très localement. Il faut donc un maillage relativement raffiné en fond de fissure.

À titre de comparaison entre un maillage classique avec un tore à n couches d'éléments en fond de fissure et un maillage libre X-FEM, on peut dire que la taille des éléments X-FEM en fond de fissure doit être de l'ordre de celle des éléments de la couche $n/2$ du tore.

Seul l'estimateur d'erreur par résidu est disponible pour les éléments X-FEM, en 2D uniquement.

Remarques et conseils :

- Pour fixer les idées, pour une fissure de longueur a en milieu infini, la taille des éléments en fond de fissure doit être entre $a/10$ et $a/20$ pour obtenir une erreur sur la taux de restitution d'énergie entre 1% et 2%.
- Afin d'obtenir un maillage raffiné en fond de fissure, deux approches peuvent être envisagées :
  1) L'introduction d'un bloc fissure consiste à définir lors de la création du maillage, une boîte englobant la fissure. Le maillage dans cette boîte sera réglé, et la finesse du maillage doit être un paramètre de la procédure de maillage. La boîte doit être suffisamment large si l'étude la propagation de la fissure est envisagée. Il est aussi nécessaire de créer une zone de raccord entre la boîte réglée, et le reste de la structure maillée en libre. On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées des mailleurs comme Blsurf+GHS3D qui permettent de définir des cartes de tailles localement.
  2) La deuxième approche consiste à réaliser un maillage adéquat par raffinements successifs d'un maillage libre initial jugé grossier [U2.05.02]. Le critère de raffinement est la distance au fond de fissure (opérateur `RAFF_XFEM` [U7.03.51]).

3.2 Calcul élastique linéaire

3.2.1 Cas d'une fissure maillée

Le calcul des différents paramètres de la mécanique de la rupture ne se fait qu'en post-traitement du calcul mécanique classique. La mise en œuvre d'une étude est donc la suivante :

- Lecture du maillage
- Définition du modèle, des matériaux, des chargements
- Calcul mécanique avec `MECA_STATIQUE` ou `STAT_NON_LINE`
- Définition des caractéristiques de la fissure avec `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01].
- Définition des champs thêta (facultatif) : opérateur `CALC_THETA` [U4.82.02]
- Calcul avec l'opérateur `CALC_G` [U4.82.03] :
  - option `CALC_G` ou `CALC_G_GLOB` : calcul de G
  - option `CALC_K_G` : calcul de K et de G
  - option `CALC_K_MAX`, `G_MAX`, `G_MAX_GLOB` :maximisation de K ou de G en présence de chargements signés ou non signés
- Calcul avec l'opérateur `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05] : calcul de K et de G à partir des sauts de déplacement sur les lèvres (extraits directement par l'opérateur du champ de déplacement global).

3.2.2 Cas d'une fissure non maillée

Dans le cas d'une fissure non maillée, il y a une étape préalable de définition et d'enrichissement du modèle (méthode X-FEM, cf. [U2.05.02] pour plus de détails). La mise en œuvre d'une étude est donc la suivante :

- Lecture du maillage (sans fissure)
- Définition du modèle sain, des matériaux
- Définition de la fissure : `DEFI_FISS_XFEM`
- Création du modèle enrichi : `MODI_MODELE_XFEM`
- Calcul mécanique avec `MECA_STATIQUE` ou `STAT_NON_LINE`
- Calcul avec l'opérateur `CALC_G` [U4.82.03] :
    - option `CALC_G` ou `CALC_G_GLOB` : calcul de G
    - option `CALC_K_G` : calcul de K et de G
- Calcul avec l'opérateur `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05] : calcul de K et de G à partir des sauts de déplacement sur les lèvres
- Création du maillage de visualisation et visualisation des champs résultats (contraintes, déplacement) : `POST_MAIL_XFEM` et `POST_CHAM_XFEM`.

3.2.3 Utilisation des résultats

Les facteurs d'intensité des contraintes et les taux de restitution d'énergie calculés peuvent servir à :

- évaluer le risque d'amorçage du défaut (comparaison avec la ténacité) ;
- calculer la vitesse de propagation en fatigue de la fissure (loi de Paris) [U4.82.04] pour un éventuel calcul de propagation (par remaillage ou avec `PROPA_FISS` pour une fissure non maillée [U4.82.11]) ;
- estimer la direction de bifurcation de la fissure sollicitée en mode mixte 28, 28, [U4.82.03] [U4.82.04].

3.3 Calcul non-linéaire : Indicateurs de décharge et de perte de radialité

Ces indicateurs permettent de localiser les décharges locales et la perte de radialité (champ `DERA_ELGA` et `DERA_ELNO` calculé avec `CALC_CHAMP`.

Attention à l'interprétation des indicateurs de décharge et de perte de radialité : la valeur donnée au temps t_i correspond au diagnostic de ce qui se passe entre t_i et t_{i+1} . Ainsi, la valeur calculée au dernier pas de temps n'a pas de sens. L'indicateur de décharge est négatif pour indiquer une décharge locale, et l'indicateur de radialité vaut 0 pour un trajet radial.

Remarque :

L'interprétation de l'indicateur de perte de radialité n'est pas aisée. On ne sait en particulier pas définir de seuil à partir duquel le calcul n'est plus valide.
Une solution alternative peut consister à comparer en post-traitement d'un calcul élastoplastique le G élastique non linéaire avec ou sans re-calcul des contraintes (mot clé `CALCUL_CONTRAINTE` de `CALC_G`).
Si on reste bien dans le domaine de validité du calcul de G (chargement radial et monotone), alors les résultats avec ou sans re-calcul des contraintes sont identiques. Dès qu'on sort de ce domaine de validité, l'écart croît. On peut donc vérifier à posteriori qu'on reste bien dans les hypothèses de calcul de G .

4 Recommandations d’utilisation

4.1 Introduction du champ thêta

4.1.1 Conditions à respecter

Le champ θ est un champ de vecteurs, défini sur le solide fissuré, qui représente la transformation du domaine lors d'une propagation de fissure. Ce champ doit vérifier les conditions suivantes :

- la transformation ne doit modifier que la position du fond de fissure et pas le bord du domaine $\partial\Omega$. Le champ θ doit donc être tangent à $\partial\Omega$ (en particulier les lèvres de la fissure), i.e. en notant $\mathbf{n}$ la normale à $\partial\Omega$: $\theta.\mathbf{n}=0 \quad \text{sur}\,\partial\Omega$.
- Le champ θ doit être localement dans le plan tangent aux lèvres de la fissure et en 3D normal à l'arête à laquelle il appartient. Ceci correspond à la direction de propagation de la fissure.
- Le champ θ doit également être continu sur Ω .

4.1.2 Conseil sur le choix des couronnes Rinf et Rsup

Dans Code_Aster, le choix a été fait de définir le champ θ de la façon suivante :

- la direction du champ est colinéaire à la direction de propagation de la fissure. En 3D, on prend la direction locale de la projection du nœud considéré sur le fond de fissure ;
- la norme de θ est définie à partir de deux couronnes (ou tores en 3D) , de rayon R_{inf} et R_{sup} . En deçà de R_{inf} , le module du champ thêta est constant, au delà il est nul et il est linéaire entre les deux, cf. Figure 4.1.2-1.

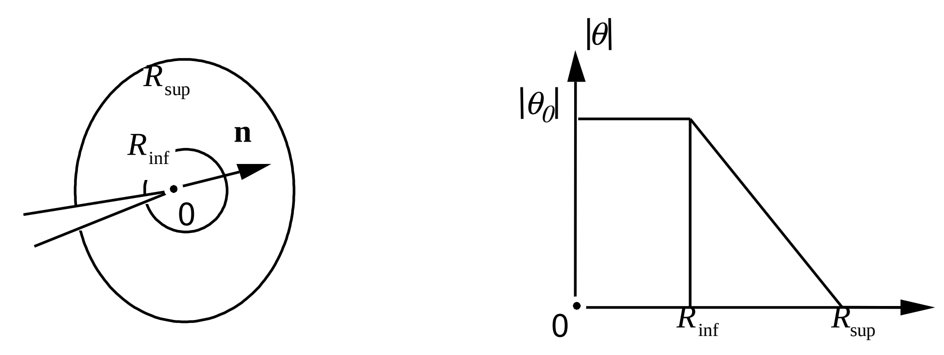


Figure 4.1.2-1: Définition géométrique du champ thêta

La construction du champ théta est décrite précisément dans [R7.02.01]. Elle est implantée dans les commandes `CALC_THETA` et `CALC_G`.

En 2D et en axisymétrique le fond de fissure Γ_0 se limite à un point. L'utilisateur définit :

- les rayons R_{inf} et R_{sup} ,
- le module $|\theta_0|$ en fond de fissure (égal à 1 par défaut),
- la direction de propagation de la fissure m .

En 3D l’utilisateur définit :

- les rayons $R_{\text{inf}}(s)$ et $R_{\text{sup}}(s)$,
- la topologie du fond de fissure : ouvert ou fermé suivant si la fissure est débouchante ou non,

- le module $|\theta_0|$ en fond de fissure (uniquement pour le calcul de G global sinon les P champs θ^i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement selon la famille de fonctions d'interpolation choisie, voir §21).

Les directions du champ thêta hors extrémités sont calculés automatiquement à partir des lèvres de la fissure, mais l'utilisateur peut éventuellement les définir lui-même en utilisant le mot clé DIRE_THETA.

Remarque :

•Les champs de déplacement et de contrainte sont singuliers en fond de fissure ; la précision du calcul est donc moins bonne au voisinage du fond. On note que la forme du champ thêta choisie ($\theta.\boldsymbol{m}$ constant entre 0 et $R_{\inf}$) permet justement d'annuler la contribution du terme classique de $G(\theta)$ à l'intérieur de la première couronne (terme en $\int_{\Omega}[\sigma(\boldsymbol{u}):(\nabla \boldsymbol{u}.\nabla\theta)-\Psi(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\mathrm{div}\theta]d\Omega$).

•Ne pas oublier que les chargements appliqués au-delà de $R_{\sup}$ ont une contribution nulle dans les post-traitements de mécanique de la rupture. Ceci peut être utile si on applique un chargement non supporté comme FORCE_NODALE, DDL_IMPO (en 2D) ou FACE_IMPO (en 3D).

Conseils sur le choix des rayons $R_{\inf}$ et $R_{\sup}$: le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture est théoriquement indépendant du choix de la couronne d'intégration (en l'absence de chargement sur les lèvres, volumique ou thermique). Néanmoins il est préférable de respecter quelques règles :

- ne jamais prendre $R_{\inf}$ ou trop petit par rapport aux dimensions du problème car les déplacements singuliers sont mal calculés au voisinage du fond de fissure (cf. remarque ci-dessus) ;
- le rayon supérieur $R_{\sup}$ peut être aussi grand que l'on veut à condition que la couronne ainsi définie soit contenue dans le solide. En 3D, il ne faut pas prendre un rayon $R_{\sup}$ trop grand, sinon la direction du champ thêta (calculée par projection sur le fond de fissure) peut être imprécise ;
- le choix des rayons $R_{\inf}$ et $R_{\sup}$ est indépendant de la topologie du maillage. Cependant, si le maillage est rayonnant en pointe de fissure, il est recommandé de prendre des couronnes d'intégration coïncidentes avec les couronnes du maillage (réduction des oscillations de G le long du fond de fissure en 3D) ;
- en thermo-élastoplasticité, on utilise une fissure comme entaille. On s'assurera que le rayon inférieur $R_{\inf}$ est bien supérieur au rayon de l'entaille.
- Prendre plusieurs couronnes consécutives pour vérifier [R1,R2], [R2,R3], [R3, R4],...

Pour se fixer les idées, pour une fissure de longueur *a* en milieu infini, la taille des éléments en fond de fissure doit être inférieure à $a/10$ pour obtenir une erreur raisonnable (de l'ordre du % sur $K1$). Pour les couronnes d'intégration, on prend alors généralement $R_{\inf}$ de l'ordre de 1 à 3 fois la taille des éléments au voisinage du fond ; et $R_{\sup}$ de 3 à 7 fois la taille des éléments.

Une détermination automatique de $R_{\inf}$ et $R_{\sup}$ est possible (ces mot-clés sont facultatifs). S'ils ne sont pas indiqués, ils sont automatiquement calculés à partir du maximum h des tailles de mailles connectées aux nœuds du fond de fissure. Il a été choisi de prendre $R_{\sup}=4h$ et $R_{\inf}=2h$. Si on choisit la valeur automatiquement calculée pour $R_{\inf}$ et $R_{\sup}$, il convient toutefois de s'assurer que ces valeurs (affichées dans le fichier .mess) sont cohérentes avec les dimensions de la structure.

4.1.3 Problème de la discrétisation en 3D

En 3D, pour un nœud courant du fond de fissure, la direction de propagation est définie comme étant la moyenne des normales aux mailles segments du fond de fissure à sa gauche et à sa droite. Pour les nœuds extrémités, la normale est calculée à partir d'une seule maille, et peut donc être moins précise, voire fausse.

Fissure débouchante orthogonalement aux bords : l es vecteurs de direction de propagation à l'origine et à l'extrémité du fond sont automatiquement calculés en prenant en compte les bords de la structure. Les mots-clés DTAN_ORIG et D TAN_EXTR (commande DEFI_FOND_FISS pour le calcul de G sur une fissure maillée) qui perm ettent d'imposer la direction de ces vecteurs n'ont donc pas besoin d'être précisés.

Fissure débouchante de façon non perpendiculaire : à l'extrémité débouchante du fond de fissure, le champ θ ne peut pas simultanément être normal à l'arête à laquelle il appartient (dans le plan tangent des lèvres de la fissure) et vérifier la condition $\theta.\mathbf{n}=0$ sur $\partial\Omega$.

La solution conseillée est d'imposer comme direction de propagation aux extrémités (mots-clés DTAN_ORIG et DTAN_EXTR) la moyenne de la normale au fond de fissure en ce point θ_1 et de la tangente à l'arête θ_2.

On peut également définir la direction du champ θ sur tous les nœuds du fond de fissure avec le mot clé DIRE_THETA dans les commandes CALC_THETA ou CALC_G. Au voisinage de l'extrémité débouchante, on choisit comme direction la moyenne de la normale au fond de fissure en ce point θ_1 et de la tangente à l'arête θ_2.

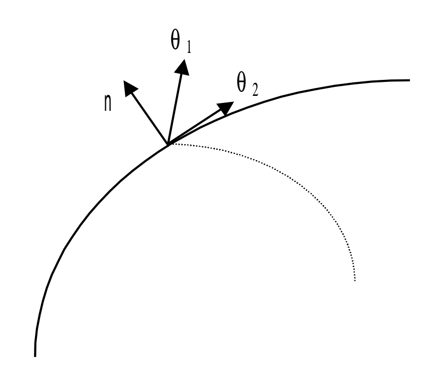


Figure 4.1.3-1: Direction de propagation aux extrémités de la fissure

4.2 Méthodes d'interpolation en 3D

4.2.1 Cadre général

Le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ est solution de l'équation variationnelle $\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s).\mathbf{m}(s)ds=G(\theta), \quad \forall\theta\in\Theta$.

Pour résoudre cette équation :

on décompose le champ scalaire $G(s)$ sur une base que nous notons $(p_j(s))_{1\le j\le N}$. Soit G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base : $G(s)=\sum_{j=1}^{N} G_j p_j(s)$.

on se donne une base de fonctions tests pour θ en choisissant P champs θ^i indépendants pour la trace du champ $\boldsymbol{\theta}$ sur le fond de fissure Γ_0 : $(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{i}}(s))_{1\le i\le P}$.

Les G_j sont déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j = b_i \quad , \quad i=1,P$$

avec $a_{ij} = \sum_{k=1}^{M} \theta_k^i \int_{\Gamma_o} p_j(s) q_k(s) . m(s) ds$

$$b_i = G(\theta^i)$$

Ce système a une solution si on choisit P champs θ^i indépendants tels que : $P \geq N$ et si $M \geq N$. Il peut comporter plus d'équations que d'inconnues, auquel cas il est résolu au sens des moindres carrés.

4.2.2 Méthodes de lissage de G et Thêta

Dans *Code_Aster*, on a choisi deux familles de bases (cf. [§2.2]) :

- les polynômes de LEGENDRE $\gamma_j(s)$ de degré j ($0=j=7$),
- les fonctions de forme du nœud k de Γ_0 : $\varphi_k(s)$ ($1=k=NNO$ = nombre de nœuds de Γ_0) (de degré 1 pour les éléments linéaires et de degré 2 pour les éléments quadratiques).

Ces familles de bases et les systèmes linéaires à résoudre sont décrits précisément dans la documentation de référence [R7.02.01]. L'utilisation des fonctions de forme est appelée `'LAGRANGE'` dans *Code_Aster*. Deux variantes sont disponibles :

- `'LAGRANGE_REGU'` : forme régularisée du lissage de `LAGRANGE`, consistant à prendre systématiquement des fonctions de forme linéaires et à étendre le support de chaque champ thêta sur 4 mailles consécutives (contre 2 avec `'LAGRANGE'`) ;
- `'LAGRANGE_NO_NO'` : version simplifiée du lissage de `LAGRANGE`, permettant dans certains cas d'obtenir des résultats plus réguliers en fond de fissure.

Plusieurs options sont donc possibles selon la base de fonctions tests pour thêta et la base de décomposition pour G. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

		Thêta	
		Polynômes de LEGENDRE	**Fonctions de forme**
$G(s)$	**Polynômes de LEGENDRE**	`LISSAGE_THETA= 'LEGENDRE'` `LISSAGE_G = 'LEGENDRE'`	`LISSAGE_THETA='LAGRANGE'` `LISSAGE_G= 'LEGENDRE'`

	Fonctions de forme		`LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE'`
			`LISSAGE_G = 'LAGRANGE'`
			`ou 'LAGRANGE_NO_NO'`
			
			`LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE_REGU'`
			`LISSAGE_G = 'LAGRANGE_REGU'`

Tableau 4.2.2-1 : Combinaisons possibles pour le calcul de G en 3D

4.2.3 Remarques et conseils

- **Choix de la méthode :** il est difficile de donner une préférence à l'une ou l'autre méthode. En principe les deux donnent des résultats numériques équivalents. Néanmoins la méthode Thêta : Lagrange est un peu plus coûteuse en temps CPU que la méthode Thêta : Legendre. Il est **indispensable d'utiliser plusieurs méthodes** et de comparer des résultats, afin de conforter la validité du modèle.

- **Choix du degré maximum des polynômes de Legendre** : ce choix dépend du nombre de nœuds en fond de fissure. Si on a un faible nombre de nœuds (une dizaine) il est inutile de prendre un degré supérieur à 3 (on conçoit facilement que les résultats sont médiocres si on essaie de trouver un polynôme de degré 7 passant par 10 points). Au delà d'une vingtaine de nœuds en fond de fissure on peut utiliser des degrés allant jusqu'à 7. L'expérience montre que le choix d'un degré égal à 5 donne de bons résultats dans la plupart des cas (cf. remarque ci-dessous).
- **Cas des fissures fermées :** si le fond de fissure est une courbe fermée, des problèmes de continuité de la solution au point arbitrairement choisi comme abscisse curviligne origine interdisent l'emploi des polynômes de Legendre. Si le fond de fissure a été déclaré « fermé » dans `DEFI_FOND_FISS` , on doit utiliser les fonctions de forme (Lagrange) pour décrire les fonctions G et θ .
- **Problème du non respect de la symétrie :** si on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure, on doit en principe avoir une courbe $G(s)$ dont la pente de la tangente est nulle à l'interface de la symétrie. Ceci n'est pas respecté par les deux méthodes. Les valeurs de $G(s)$ obtenues aux extrémités du fond de fissure doivent toujours être interprétées avec prudence, surtout si la fissure est débouchante de façon non perpendiculaire (voir §20).
- **Problème des oscillations avec Lagrange :** des oscillations peuvent apparaître avec la méthode Lagrange, en particulier si le maillage comporte des éléments quadratiques. Ces oscillations sont liées à un profil radial du champ thêta qui est différent sur les nœuds sommet et sur les nœuds milieu. Un lissage de type `'LAGRANGE_NO_NO'` ou `'LAGRANGE_REGU'` permet de limiter ces oscillations. Par ailleurs, si le maillage est rayonnant en fond de fissure (fissure maillée), on rappelle qu'il est recommandé de définir des couronnes `R_INF` et `R_SUP` coïncidant avec les frontières des éléments.
- **Cas des maillages libres** (en particulier fissures non maillées) : quand le maillage n'est pas régulier le long du fond de fissure (taille et répartition des éléments variables), de fortes oscillations peuvent apparaitre avec la méthode Lagrange. Un lissage de type `'LAGRANGE_NO_NO'` ou `'LAGRANGE_REGU'` limite ces oscillations, mais peut être insuffisant en particulier pour les calculs X-FEM. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser l'opérande `NB_POINT_FOND` de `CALC_G` pour garantir une équi-répartition des points de calculs en fond de fissure. Le choix d'un rapport de l'ordre de 4 entre le nombre de points total en fond de fissure et le nombre de points de calcul semble approprié pour limiter les oscillations avec la méthode Thêta : Lagrange.

Illustration des problèmes d'oscillations avec Legendre : soit un cas de figure où la solution est constante sur le fond de fissure $G^{exact}(s)=\gamma_0(s)$. Si le terme devant le polynôme de Legendre de degré sept est mal calculé, à un facteur ε près (mais tous les autres coefficients devant les autres polynômes valent exactement 0), alors le résultat numérique est : $G(s)=\gamma_0(s)+\varepsilon\cdot\gamma_7(s)$. L'erreur relative commise sur G est donc :

$$e=\frac{G(s)-G^{exact}(s)}{G^{exact}(s)}=\varepsilon\cdot\frac{\gamma_7(s)}{\gamma_0(s)}=\varepsilon\sqrt{15}\,\frac{P_7\left(\frac{2s}{l}-1\right)}{P_0\left(\frac{2s}{l}-1\right)}=\varepsilon\sqrt{15}\,P_7\left(\frac{2s}{l}-1\right)$$
.

Si on trace le rapport $\frac{e}{\varepsilon}$ en fonction de l'abscisse curviligne normée $\frac{s}{l}$, on obtient la figure suivante.

L'erreur aux extrémités (en $x=0$ et en $x=\frac{s}{l}$) est environ 2 à 3 fois plus grande que l'erreur maximale à l'intérieur du fond. Par exemple, si ε vaut 10^{-2} (soit 1% d'erreur), on commettra une erreur maximale de 1,5% partout, sauf aux extrémités où l'erreur atteindra 4%.

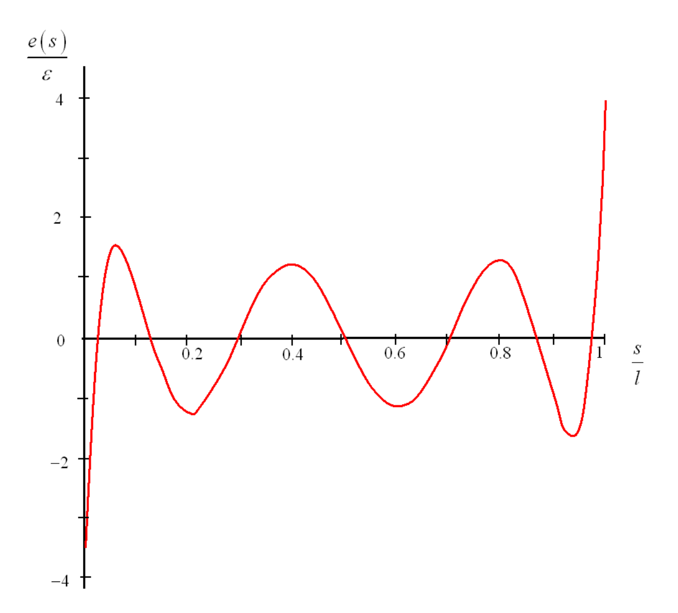


Figure 4.2.3-1 : rapport de l'erreur relative sur la précision en fonction de l'abscisse curviligne normée

4.3 Conseils pour les calculs avec POST_K1_K2_K3

Choix de la distance d'extrapolation : la distance d'extrapolation ABSC_CURV_MAXI est le seul paramètre utilisateur. En général, cette distance est choisie égale à 3 à 5 fois la taille des éléments au voisinage du fond de fissure. Dans le cas d'une fissure maillée, le paramètre ABSC_CURV_MAXI est facultatif. La valeur par défaut est alors égale à $4h$ où h est la taille maximale des mailles connectées aux nœuds du fond de fissure.
Cas des fissures maillées : le maillage doit être de préférence quadratique et comporter suffisamment de nœuds perpendiculairement au fond de fissure. D'autre part, les résultats sont nettement améliorés si, dans le cas où le maillage est composé d'éléments quadratiques, on déplace les nœuds milieux (des arêtes qui touchent le fond de fissure), au quart de ces arêtes en les rapprochant du fond de fissure. Ceci est rendu possible par le mot clé MODI_MAILLE (option 'NOEUD_QUART') de la commande MODI_MAILLAGE [U4.23.04].
Cas des fissures non maillées : la précision de la méthode est sensible au choix de la zone d'enrichissement de la méthode X-FEM (paramètre RAYON_ENRI de DEFI_FISS_XFEM). Dans l'idéal, le rayon d'enrichissement et l'abscisse curviligne maximale ABSC_CURV_MAXI sont de l'ordre de trois fois la taille de l'arrête minimale du maillage.
Performances : dans le cas X-FEM, les calculs sont assez consommateurs en temps et en mémoire s'il y a beaucoup de points sur le fond de fissure. L'utilisation du mot clé NB_POINT_FOND permet de limiter le post-traitement à un certain nombre de points équi-répartis le long du fond.

4.4 Normalisation, symétries

4.4.1 2D contraintes planes et déformations planes

En dimension 2 (contraintes planes et déformations planes), le fond de fissure est réduit à un point et la valeur $G(\theta)$ issue de la commande CALC_G est indépendante du choix du champ θ :

$$G=G(\theta) \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

4.4.2 Axisymétrie

En axisymétrique il faut normaliser la valeur $G(\theta)$ obtenue avec *Code_Aster* pour les options CALC_G, G_MAX et G_BILI :

$$G=\frac{1}{R}G(\theta)$$

où *R* est la distance du fond de fissure à l'axe de symétrie [R7.02.01 §2.4.4].

Pour l'option `CALC_K_G`, les valeurs de G et de K fournies dans le tableau résultat sont directement les valeurs locales, il ne faut donc pas les normaliser.

4.4.3 3D

En dimension 3, la valeur de $G(\theta)$ pour un champ θ donnée est telle que :

$$g(\theta)=\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s).m(s)\,ds$$

Par défaut, la direction du champ θ en fond de fissure est la normale au fond de fissure dans le plan des lèvres. En choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on a alors :

$$\theta(s).\mathbf{m}(s)=1$$

et :

$$G(\theta)=\int_{\Gamma_0} G(s)\,ds$$

Soit G le taux de restitution de l'énergie global, pour avoir la valeur de G par unité de longueur, il faut diviser la valeur obtenue par la longueur de la fissure l :

$$G=\frac{1}{l}G(\theta)\ .$$

4.4.4 Symétrie du modèle

Il est possible de prendre en compte une éventuelle symétrie du problème traité directement sur le calcul du taux de restitution d'énergie G et les facteurs d'intensité des contraintes. Voir le mot-clé `SYME` dans `CALC_G` [U4.82.03] et `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05].

5 Conclusions

Les points à retenir sont les suivants :

- L'étude d'une fissure en élasticité (linéaire ou non) peut se faire sur une fissure maillée comme sur une fissure non maillée. Dans les deux cas le maillage doit être suffisamment fin au voisinage du fond de fissure pour capter correctement la singularité des contraintes.
- Les calculs sont possibles sur une fissure non plane, mais l'utilisateur doit veiller à ce qu'elle reste suffisamment régulière pour que les hypothèses de calcul soient valides : il ne faut pas avoir une singularité géométrique sur le fond ou sur les lèvres. Typiquement, le calcul est licite pour une fissure axisymétrique, mais pas pour un coin.
- En élasticité linéaire, plusieurs opérateurs (`CALC_G`, `POST_K1_K2_K3`) et plusieurs méthodes (d'extrapolation, de lissage, ...) sont disponibles. Il est **indispensable** de comparer les résultats des des différentes méthodes et opérateurs pour s'assurer de la bonne qualités du modèle. Il est également recommandé d'évaluer la sensibilité du résultat au choix des paramètres des opérateurs (rayons d'intégration) et au raffinement du maillage.

6 Documentation de *Code_Aster* relative à la mécanique de la rupture

Documents de Référence :

[R7.02.01]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire
[R7.02.03]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité non linéaire
[R7.02.04]	Représentation Lagrangienne de variation de domaine
[R7.02.05]	Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire plane
[R7.02.07]	Taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité
[R7.02.08]	Calcul des coefficients d'intensité de contraintes par extrapolation du champ de déplacements

Documents d'Utilisation :

[U4.82.01]	Opérateur `DEFI_FOND_FISS`
[U4.82.02]	Opérateur `CALC_THETA`
[U4.82.03]	Opérateur `CALC_G`
[U4.82.05]	Opérateur `POST_K1_K2_K3`
[U4.82.08]	Opérateur `DEFI_FISS_XFEM`

Cas test de Validation :

		Fissure		Modélisation				Compor.				Option					
Numéro	**Titre**	**Maillée**	**Non maillée**	**DP**	**CP**	**Axi**	**3D**	**Elas. Linéaire**	**Elas. Non linéa**	**Elastoplastique**	**Grande Déf.**	**CALC_G**	**CALC_G_GLOB**	**CALC_K_G**	**POST_K1_K2_K**	**Autres**	**Particularités**
hpla310	Fissure radiale dans un barreau soumis à un choc thermique	X				X		X				X					Thermique
hpla311	Fissure circulaire dans une sphère soumise à une température uniforme sur les lèvres	X				X		X				X		X			Thermique
hplp100	Plaque fissurée en thermoélasticite	X		X				X				X		X			Thermique ; Sensibilité
hplp101	Plaque fissurée en thermoélasticité	X			X			X			X	X		X			Thermique ; Sensibilité
hplp310	Fissure radial dans un cylindre épais sous pression et chargement thermique	X		X				X				X		X			Thermique ; contact
hplp311	Fissure au centre d'une plaque mince soumise à un flux thermique	X			X			X				X		X			Thermique
hplv102	G en thermoélasticité pour une fissure circulaire en milieu infini	X				X		X				X					Thermique
hplv103	G en thermoélasticité 3D pour une fissure circulaire	X					X	X				X	X	X			Thermique
hsna120	Propagation d'un réseau de fissure en fatigue thermomécanique	X				X		X							X		Thermique ; propagation
sdls114	Facteurs d'intensité des contraintes modaux	X			X		X	X							X	X	K_G_MODA
ssla310	Fissure radiale à l'interface d'un bimatériau	X				X		X				X					Bimatériau
ssla311	Fissure circulaire soumise à une charge annulaire	X				X		X				X					
sslp101	Plaque fissurée en traction	X			X			X				X		X			
sslp102	Calcul de G avec déformations initiales	X		X				X				X					Etat initial
sslp103	Calcul de K1 et K2 pour une plaque circulaire fissurée	X			X			X				X		X			Mode mixte
sslp310	Fissure pressurisée dans un domaine plan illimité	X			X			X						X			MACR_ELAS_MULT
sslp311	Fissure centrale dans une plaque à deux matériaux	X			X			X				X					Bimatériau
sslp313	Fissure oblique dans une plaque infinie en traction	X			X			X						X	X		Mode mixte ; Arlequin
sslp314	Fissure déviée à l'interface de 2 plaques élastiques	X			X			X				X		X			
sslp315	Propagation d'une fissure débouchante dans une plaque 2D		X	X				X						X	X		Propagation
sslv110	Fissure semi-elliptique dans un milieu infini	X	X				X	X				X	X	X	X		Sensibilité
sslv134	Fissure circulaire en milieu infini	X	X				X	X				X	X	X	X	X	G_BILI, G_GLOB, CALC_K_MAX
sslv310	Fissure semi-elliptique débouchante en peau interne dans un cylindre sous pression	X					X	X				X	X				
sslv311	Fiss en quart d'ellipse au coin d'un disque épais	X					X	X						X			
sslv312	Fissure elliptique perpendiculaire à l'interface entre deux matériaux	X					X	X				X	X				
sslv313	Tube sous pression fissuré	X	X				X	X				X		X	X		
sslv314	Propagation de fissure dans une plaque 3D en mode I pur		X				X	X						X	X		Propagation
sslv315	Propagation de fissure inclinée dans une plaque 3D		X				X	X						X	X		Propagation
ssnp102	Plaque entaillée en plasticité	X		X			X			X		X					
ssnp110	Fissure de bord en élastoplasticité dans une plaque rectangulaire	X	X	X	X				X			X					
ssnp311	Fissuration en mode II d'une éprouvette elastoplastique	X		X					X			X					
ssnp312	Fissure parallèle à une interface dans une CT bimétallique	X		X					X			X					
ssnv108	Eprouvette CT en non linéaire	X	X		X		X		X			X					
ssnv166	Cylindre fissuré sous chargement multiple	X					X	X						X	X		Contact
ssnv192	Eprouvette avec fissure centrale		X				X	X						X			
ssnv185	Fissure débouchante dans une plaque 3D	X	X				X	X				X		X	X		

7 Bibliographie

[1] BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977

[2] BUI H.D., AMESTOY M., DANG VAN K., Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire, C.R. Acad. SC. Paris, t. 289, série B, No 8, p99, 1979

[3] DEBOST I., WADIER Y. : Application de l'approche énergétique à l'interprétation de l'effet petit défaut. Première partie : modèle de défaut de type fissure. Note HI-74/01/015/A, Juin 2001

[4] DESTUYNDER Ph, DJAOUA M., Equivalence de l'intégrale de Rice et de G en mécanique de la rupture, C.R. Acad. SC. Paris, t. 290, série A, p347, 1980

[5] GRIFFITH A., The phenomena of Rupture and flow in solids, M.Eng. (of the Royal Aircraft Establishment), communicated by Taylor, F.R.S., 1920

[6] LEBLOND J.B : "Mécanique de la rupture fragile et ductile" – Lavoisier, 2003.

[7] LEFEVRE W., BARBIER G., MASSON R., ROUSSELIER G., A modified Beremin model to simulate warm pre-stress effect Nucl. Eng. Des. 198, 89-96 – 2002

[8] MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07, 1984.

[9] MIALON P., Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta, EDF, Bulletin de la direction des études et recherches, Série C, 1988

[10] DESTUYNDER P., M. DJAOUA M., LESCURE S., Some remarks on elastic fracture mechanics (quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique), Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 2, n°1, p. 113-135, 1983